Mechanische Schwingungen

I.) Feder-Schwere-Pendel

a) Wir betrachten ein idealisiertes Feder-Schwere-Pendel mit der Masse m und der Federkraft $F = D \cdot x(t)$ (Hooksches Gesetz). D sei die Federkonstante der verwendeten Feder und x die Auslenkung aus der Ruhelage x_0. Die Erdanziehung erzeugt eine zweite Kraft $F = mg$. Es ergibt sich folgendes lineares Kraftgesetz:
$F_{Rück} = D \cdot (x_0 - x) - mg = -Dx$, da $Dx_0 = mg$ (per Definition)
Aus $F = ma$ (Newton) und $a = \ddot{x}(t)$ folgt

$$F = ma$$
$$-D \cdot x(t) = m \cdot a(t)$$
$$-D \cdot x(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$$
$$0 = D \cdot x(t) + m \cdot \ddot{x}(t)$$

Die Lösung dieser Differenzialgleichung ist
$x(t) = \hat{x} \cdot \sin(wt + j)$
Eingesetzt und abgeleitet ergibt sich
$0 = \sin(wt + j) \cdot (mw^2 - D)$

Zu jedem Zeitpunkt muss also gelten $mw^2 = D$ und somit $T = 2p\sqrt{\frac{m}{D}}$.

b) Die Richtgröße D^* ist der konstante (zumindest bei harmonischen Schwingungen) Faktor im Kraft-Weg-Gesetz $F = -D \cdot x(t)$.

c) 1.) Hier ist die Richtgröße gleich der Federhärte $D^* = D_1$
2.) Es gilt $D^* = D_1 + D_2$
3.) Es gilt $\frac{1}{D^*} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}$
4.) Es gilt wiederum: $D^* = D_1 + D_2$

Versuche:

I. Masse $m = 100g$, Erdbeschleunigung $g = 10\frac{m}{s^2}$
Daraus folgt $F = 1N$

Feder 1 (markiert):
Ausdehnung $s = 0{,}146m$, und $D = 6{,}8\frac{N}{m}$.
Feder 2 (unmarkiert):
Ausdehnung $s = 0{,}147m$, und $D = 6{,}8\frac{N}{m}$.

Bei beiden Federn war die Federkonstante hinreichend ähnlich. Der Fehler durch die Messung ist größer als der Unterschied der Federn.

Mechanische Schwingungen

2.) + 3.)

Anordnung 1:

Gemessene Zeiten (10 Periodendauern):

$t_{1-6} = 7{,}8s;\ \ 7{,}8s;\ \ 7{,}8s;\ \ 7{,}9s;\ \ 7{,}9s;\ \ 7{,}6s;$

Mittelwert: $\bar{t} = 7{,}8s$, Standartabweichung: $0{,}11s$, Masse $m = 100g$

Periodendauer: $\bar{T} = 0{,}78s$, theoretischer Wert: $T_{theoretisch} = 0{,}76s$

Fehler: 3%

Anordnung 2:

Gemessene Zeiten (10 Periodendauern):

$t_{1-8} = 7{,}8s;\ \ 8{,}0s;\ \ 7{,}9s;\ \ 8{,}0s;\ \ 8{,}0s;\ \ 8{,}2s;\ \ 7{,}9s;\ \ 7{,}8s;$

Mittelwert: $\bar{t} = 7{,}95s$, Standartabweichung: $0{,}13s$, Masse $m = 200g$

Periodendauer: $\bar{T} = 0{,}795s$, theoretischer Wert: $T_{theoretisch} = 0{,}76s$

Fehler: 5%

Anordnung 3:

Gemessene Zeiten (10 Periodendauern):

$t_{1-6} = 15{,}4s;\ \ 15{,}8s;\ \ 15{,}5;\ \ 15{,}4s;\ \ 15{,}5s;\ \ 15{,}8s;$

Mittelwert: $\bar{t} = 15{,}567s$, Standartabweichung: $0{,}19s$, Masse $m = 200g$

Periodendauer: $\bar{T} = 1{,}557s$, theoretischer Wert: $T_{theoretisch} = 1{,}52s$

Fehler: 2%

Anordnung 4:

Gemessene Zeiten (10 Periodendauern):

$t_{1-9} = 5{,}8s;\ \ 5{,}8s;\ \ 5{,}6s;\ \ 5{,}8s;\ \ 5{,}8s;\ \ 5{,}5s;\ \ 5{,}8s;\ \ 5{,}6s;\ \ 5{,}7s;$

Mittelwert: $\bar{t} = 5{,}711s$, Standartabweichung: $0{,}12s$, Masse $m = 100g$

Periodendauer: $\bar{T} = 0{,}57s$, theoretischer Wert: $T_{theoretisch} = 0{,}54s$

Fehler: 5%

Da alle Werte maximal um 5% abweichen, liegt die Vermutung nahe, dass es sich nicht um einen systematischen Fehler durch den Einfluss des Federgewichts handelt.

Aus der Literatur ist folgende Formel für die Berechnung der Periodendauer unter Berücksichtigung der Federmasse bekannt

$T = 2p \cdot \sqrt{\frac{m + \frac{m_F}{3}}{D}}$, wobei m_F das Federgewicht ist.

Daran erkennt man, dass das Verhältnis m_F / m sehr groß sein muss, um eine Veränderung der Periodendauer messen zu können. Dies war bei unseren Versuchen nicht der Fall.

Mechanische Schwingungen

II.) Feder-Schwere-Pendel für Fortgeschrittene:

Masse des Gewichts samt loser Rolle: $m = 114{,}9g$

Bestimmung der Richtgröße D:
Ausdehnung: $x = 3{,}7cm$
Massenveränderung: $\overline{m} = 100g$
Damit ist $D = 27\frac{N}{m}$

Gemessene Zeiten (5 Periodendauern, mehr waren auf Grund der Dämpfung nicht möglich):

$t_{1-6} = 2{,}6s;\quad 2{,}9s;\quad 2{,}9s;\quad 2{,}9s;\quad 2{,}9s;\quad 2{,}9s$

Mittelwert: $\bar{t} = 2{,}85s$, Standartabweichung: $0{,}12s$, Masse $m = 114{,}9g$
Periodendauer: $\overline{T} = 0{,}57s$, theoretischer Wert: $T_{theoretisch} = 0{,}41s$
Fehler: 28%

Dieser Versuch war sehr schwer durchzuführen. Durch die Reibung an der Rolle war die Dämpfung so stark, dass maximal 4 bis 5 Periodendauern sichtbar waren.

Auswertung:

1) DGL siehe I.) a)

2) Ausdehnung der Feder in der Ruhelage:
aus $F_{Feder} = \frac{1}{2}Ds$ und $G = mg$ folgt $2mg = Ds_0$ und somit $s_0 = \frac{mg}{2D}$
Die Potentielle Energie ist im angegebenen Fall lediglich in der Feder gespeichert. Dabei gilt:
$s_0 = \frac{mg}{2D}$ also $W_{pot} = \frac{1}{2}D\cdot s_0^{\ 2} = \frac{m^2g^2}{8D}$

3) Die zugeführte Energie ist bei einer Auslenkung nach oben Lageenergie $W_{Lage} = mgs$. Die Feder hilft jedoch mit, sie gibt Energie ab: $W_{Feder} = \frac{1}{2}D\cdot s^2$.
Die gesamte potentielle Energie ist somit

$$W_{Ges} = \frac{1}{2}Ds_0^{\ 2} + mgs - \frac{1}{2}Ds^2$$

$$= \frac{1}{2}Ds_0^{\ 2} + Ds^2 - \frac{1}{2}Ds^2 \text{ , da } mg = Ds$$

$$= \frac{1}{2}Ds_0^{\ 2} + \frac{1}{2}Ds^2$$

Mechanische Schwingungen

4) $W_{System} = \frac{1}{2} D s_0^{\;2} + \frac{1}{2} D \cdot s^2(t) + \frac{1}{2} m \cdot \dot{s}^2(t)$

5) Differenziert ergibt sich folgende Gleichung:

$$\dot{W}_{System} = \frac{1}{2} D \cdot \dot{s}(t) \cdot 2 \cdot s(t) + \frac{1}{2} m \cdot 2 \cdot \ddot{s}(t) \cdot \dot{s}(t)$$
$$F = D \cdot \dot{s}(t) \cdot s(t) + m \cdot \ddot{s}(t) \cdot \dot{s}(t)$$
$$F = \dot{s}(t) \cdot (D \cdot s(t) + m \cdot \ddot{s}(t))$$

Da bei einer eigenständigen Schwingung von außen keine Kraft auf das System wirkt, muss gelten:

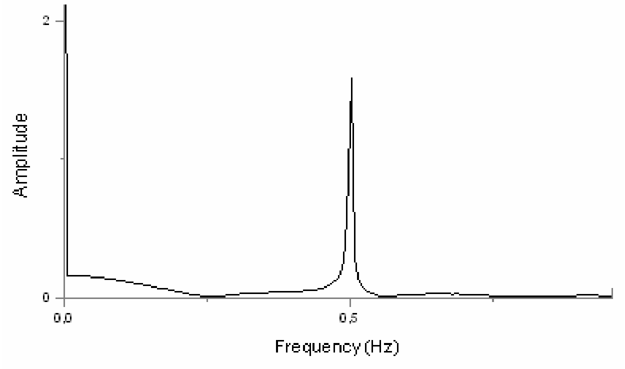
$$F = \dot{s}(t) \cdot (D \cdot s(t) + m \cdot \ddot{s}(t))$$
$$0 = \dot{s}(t) \cdot (D \cdot s(t) + m \cdot \ddot{s}(t))$$
$$0 = D \cdot s(t) + m \cdot \ddot{s}(t)$$

Die Lösung der DGL und die Bestimmung der Periodendauer ist in I.) a) beschrieben. Dabei ist $s(t) = x(t)$.

III.) Dämpfung

Der Winkelaufnehmer funktionier nach folgendem Prinzip:
An dem Pendel sind zwei Magnete angebracht, die ein Magnetfeld erzeugen. Dieses Magnetfeld hat gegenüber der festen Aufhängung den Winkel f. Der Winkel f ist hierbei exakt der Winkel, mit dem das Pendel aus seiner Ruhelage ausgelenkt ist. In der Aufhängung befindet sich ein Magnetfeldsensor. Dieser misst die Intensität des Magnetfelds. Er ist senkrecht zum Pendel in der Ruhelage ausgerichtet. Es gilt also für die gemessene Feldstärke $B_{gemessen} = \sin(f) \cdot B_{gesamt}$. Für kleine Winkel kann mit der Näherung $\sin(f) = f$ gerechnet werden. Laut Hersteller sind die Größen Winkel und Ausgangsspannung für Winkel die kleiner als 14° bis auf 1% proportional.

Die Periodendauer betrug $T = 2s$, was auch die FFT zeigt:



Mechanische Schwingungen

Die theoretische Periodendauer ist:

$$T = 2p\sqrt{\frac{l}{g}} = 2p\sqrt{\frac{1m}{10\frac{m}{s^2}}} = 2s$$

In der Herstellerbeschreibung steht als Länge des Pendelflachstabes 25cm. Dies ist eindeutig nicht die Länge des Stabes, den wir benutzt haben.

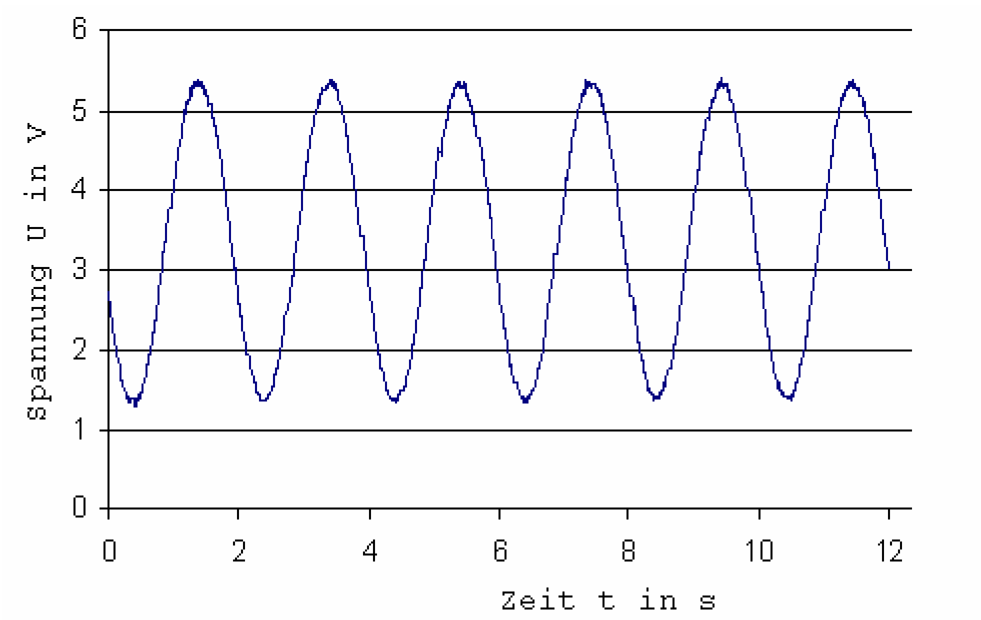


Diagramm 1: Ungedämpfte Schwingung

Der Startwinkel betrug 15°. Die maximale Spannungsänderung beträgt $U_{\max änd} = 4{,}11V$. Für 15° Auslenkung ist die Spannung gerade noch proportional zum Winkel. Der Nulldurchgang ist bei $U_{Nulldurch} = 3{,}35V$. Dort beträgt die Spannungsänderung pro Sekunde $\dot{U}_{Nulldurch} = 6V$. Dies entspricht einem Winkel von 44°. Der Radius des Kreises auf dem sich das Pendel bewegt beträgt 1m. Somit ist der Kreisumfang $U = 6{,}28m$ und der Kreisbogen von 44° $b = 0{,}77m$. Das Pendel bewegt sich also im Nulldurchgang mit einer Geschwindigkeit von $v = 0{,}77\frac{m}{s}$.

Die anfängliche Lageenergie im Winkel von 15° beträgt
$W_{Lage} = mgh = mgl \cdot \sin(15°)$
Im Nulldurchgang ist die gesamte Lageenergie in kinetische Energie umgewandelt. Also gilt:

$$mgl \cdot \sin(15°) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\sqrt{2gl \cdot \sin(15°)} = v$$

$$v = 2{,}28\frac{m}{s}$$

Mechanische Schwingungen

Die starke Abweichung von dem gemessenen Wert, kann unter anderem daran liegen, dass das Gewicht nicht am unteren Ende des Stabes befestigt wurde, sondern darüber. Des Weiteren ist die Messung der Geschwindigkeit im Nulldurchgang auf diese Methode nicht sehr zuverlässig/genau. In einem weiteren Versuch müsste man diese, z.B. mit Hilfe einer Lichtschranke exakt messen.

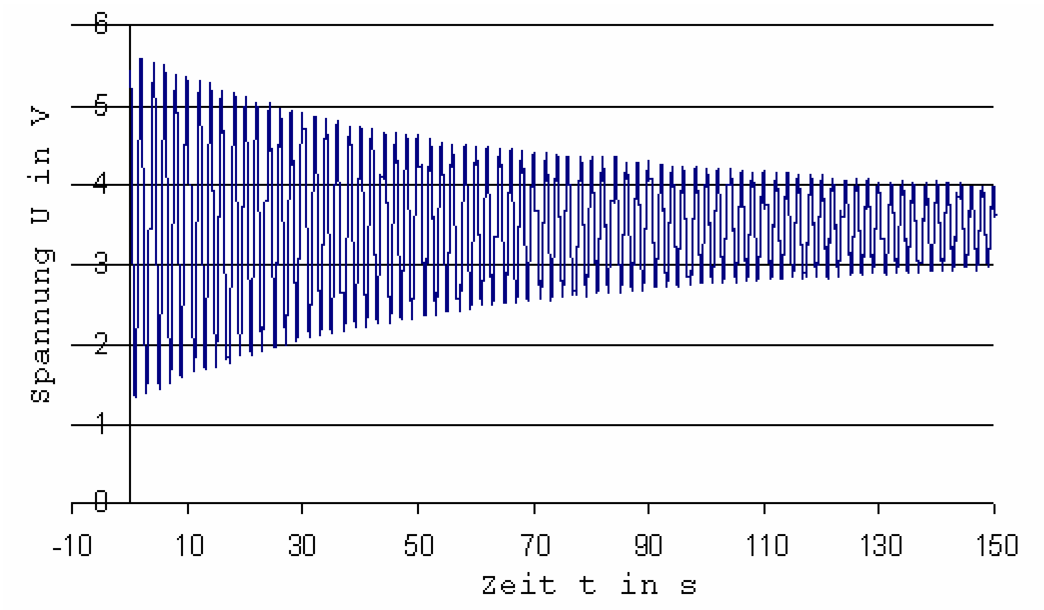


Diagramm 2: Dämpfung mit Luftreibung

Die Anpassung durch eine Exponentialfunktion verlief hinreichend schlecht, so dass auf den Ausdruck verzichtet wird.