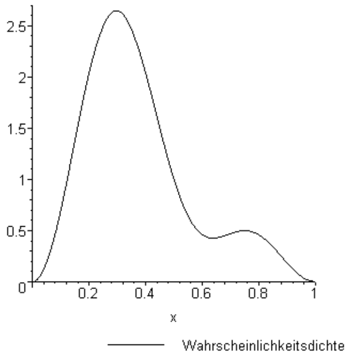
Aufgabe 13

a) Aus der Stetigkeitsbedingung der Schrödingergleichung und der Normierung folgt mit dem üblichen Ansatz $\Phi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ (siehe Klausur):

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ E_n &= \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \end{aligned}$$

b) Die Wahrscheinlichkeitsdichte zum Zustand $\psi(x,0)$ ist im folgenden Schaubild gezeichnet.



$$\begin{aligned} \psi(x,0) &= \begin{cases} \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) & \text{für } 0 < x < L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1+i}{2}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(x) & \text{für } 0 < x < L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \psi(x,t) &= \begin{cases} \frac{1+i}{2}\psi_1(x)e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(x)e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{2\hbar^2\pi^2}{mL^2}} & \text{für } 0 < x < L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

c) Der Erwartungswert ist

$$\begin{aligned} \langle\psi|H|\psi\rangle &= \int dx\ \ \psi^*(x,t)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x,t) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\int dx\ \ \psi^*(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

d) Der Ortserwartungswert ist:

$$\begin{aligned} \langle\psi|X|\psi\rangle &= \int dx\ \ \psi^*(x,t)\ x\ \psi(x,t) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Für den Impulserwartungswert gilt:

$$\begin{aligned} \langle\psi|\frac{\hbar}{i}\frac{\partial^2}{\partial x^2}|\psi\rangle &= \int dx\ \ \psi^*(x,t)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x,t) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Aufgabe 14

Mit dem Feynman Propagator gilt:

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \int dx'\ \psi(x,0)K(x',0,x,t) \\ &= \int dx'\ \sum_n \psi_n^*(x')\psi_n(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\end{aligned}$$