Aufgabe 10

a) Setze

$$s := \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\,, \quad \phi_n(s) = \psi_n\left(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} s\right)$$

Somit ist

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{\partial}{\partial s}$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2\right)\psi_n(x) &= E_n\psi_n(x) \\
\left(-\frac{\hbar\omega}{2}\partial_s^2 + \frac{\hbar\omega}{2}s^2\right)\phi_n(s) &= E_n\phi_n(s) \\
\left(-\partial_s^2 + s^2\right)\phi_n(s) &= \underbrace{\frac{2}{\hbar\omega}E_n}_{=:\epsilon_n}\phi_n(s)
\end{aligned}$$

b) Eingesetzt ergibt sich folgende Differenzialgleichung:

$$\begin{aligned}
\left(-\partial_s^2 + s^2\right)\phi_n(s) &= \epsilon_n\phi_n(s) \\
\left(-\partial_s^2 + s^2\right)H_n(s)e^{-\frac{1}{2}s^2} &= \epsilon_n H_n(s)e^{-\frac{1}{2}s^2} \\
-\partial_s^2\left(H_n(s)e^{-\frac{1}{2}s^2}\right) &= (-s^2+\epsilon_n)H_n(s)e^{-\frac{1}{2}s^2} \\
-\partial_s\left(H_n'(s)e^{-\frac{1}{2}s^2} - s\,H_n(s)e^{-\frac{1}{2}s^2}\right) &= (-s^2+\epsilon_n)H_n(s)e^{-\frac{1}{2}s^2} \\
-H_n''(s) + s\,H_n'(s) + s\,H_n'(s) - s^2\,H_n(s) + \,H_n(s) &= (-s^2+\epsilon_n)H_n(s) \\
-H_n''(s) + s\,H_n'(s) + s\,H_n'(s) + \,H_n(s) - \epsilon_n H_n(s) &= 0 \\
-H_n''(s) + 2s\,H_n'(s) + (1-\epsilon_n)H_n(s) &= 0
\end{aligned}$$

c) Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
-H_n''(s) + 2s\,H_n'(s) + (1-\epsilon_n)H_n(s) &= 0 \\
-2\left(\sum_{m=1}^{\infty} h_m^{(-)}(2m^2+m)\,s^{2m-1}\right) + 2s\,\left(\sum_{m=0}^{\infty} h_m^{(-)}(2m+1)\,s^{2m}\right) & \\
+(1-\epsilon_n)\left(\sum_{m=0}^{\infty} h_m^{(-)}\,s^{2m+1}\right) &= 0 \\
-\left(\sum_{n=0}^{\infty} h_{(n+1)}^{(-)}2(n+1)(2(n+1)+1)\,s^{2(n+1)-1}\right) + \left(\sum_{m=0}^{\infty} h_m^{(-)}2(2m+1)\,s^{2m+1}\right) & \\
+(1-\epsilon_n)\left(\sum_{m=0}^{\infty} h_m^{(-)}\,s^{2m+1}\right) &= 0 \\
-\left(\sum_{m=0}^{\infty} h_{(m+1)}^{(-)}(2m+2)(2m+3)\,s^{2m+1}\right) + \left(\sum_{m=0}^{\infty} h_m^{(-)}(2(2m+1)+(1-\epsilon_n))\,s^{2m+1}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt:

$$-h_{m+1}^{(-)}(4m^2+10m+6) + h_m^{(-)}(4m+3-\epsilon_n) = 0$$

d) Nur eine abbrechende Potenzreihe kann eine Lösung sein, da die Reihe nicht stärker ansteigen darf, als die Exponentialfunktion $e^{\frac{1}{2}s^2}$ abfällt. Dies ist nur der Fall, wenn alle Koeffizienten ab einem bestimmtem Wert 0 sind. Damit die Rekursion abbricht, muss $h_k^{(-)} = 0$ sein.

$$h_{m+1}^{(-)} = h_m^{(-)} \frac{4m+3-\epsilon_n}{4m^2+10m+6} \stackrel{!}{=} 0$$

Also sind die Eigenwerte:

$$\epsilon_n = 4n+3$$

e) Die Eigenwerte sind:

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 &= 3, \quad E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega \\
\epsilon_1 &= 7, \quad E_1 = \frac{7}{2}\hbar\omega \\
\epsilon_2 &= 11, \quad E_2 = \frac{11}{2}\hbar\omega \\
\epsilon_3 &= 15, \quad E_3 = \frac{15}{2}\hbar\omega \\
\epsilon_4 &= 19, \quad E_4 = \frac{19}{2}\hbar\omega \\
\epsilon_5 &= 23, \quad E_5 = \frac{23}{2}\hbar\omega
\end{aligned}$$

Die Eigenfunktionen sind:

$$\begin{aligned}
\psi_0(x) &= \phi_0\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) \\
&= C_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right) h_0^{(-)} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Aufgabe 10

$$\begin{aligned}
\rho_{cl}(x) &= N \int dp \ \delta\left[E - \frac{p^2}{2m} - \frac{K}{2}x^2\right] \\
&= N \int dp \left(\frac{\delta\left[p - \sqrt{\left(E - \frac{k}{2}x^2\right)2m}\right]}{\sqrt{\left(E - \frac{k}{2}x^2\right)\frac{2}{m}}} + \frac{\delta\left[p + \sqrt{\left(E - \frac{k}{2}x^2\right)2m}\right]}{\sqrt{\left(E - \frac{k}{2}x^2\right)\frac{2}{m}}} \right) \\
&= N \left(\frac{1}{\sqrt{\left(E - \frac{k}{2}x^2\right)\frac{2}{m}}} + \frac{1}{\sqrt{\left(E - \frac{k}{2}x^2\right)\frac{2}{m}}} \right) \\
&= N \sqrt{\frac{2m}{E - \frac{k}{2}x^2}}
\end{aligned}$$

Die Normierung ergibt:

$$\begin{aligned}
1 &= \int dx \sqrt{\frac{2m}{E - \frac{k}{2}x^2}} \\
&=
\end{aligned}$$