Aufgabe 8

a) Es ist $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$, somit gilt:

$$\begin{aligned} \hat{H}|\psi\rangle &= \lambda|\psi\rangle \\ \underbrace{\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle}_{\in \mathbb{R} \text{ da} \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle^*} &= \lambda \underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{\in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

Somit ist auch der Eigenwert λ reel.

b) Seien $|\psi\rangle$ und $|\varphi\rangle$ Eigenfunktionen zu $\hat{H}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \hat{H}|\psi\rangle &= \lambda_1|\psi\rangle \\ \hat{H}|\varphi\rangle &= \lambda_2|\varphi\rangle \end{aligned}$$

Da $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$, ist

$$\langle\varphi|\hat{H} = \lambda\langle\varphi|$$

Durch multiplizieren mit $|\psi\rangle$, bzw $\langle\varphi|$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle\varphi|\hat{H}|\psi\rangle &= \lambda_1\langle\varphi|\psi\rangle \\ \langle\varphi|\hat{H}|\psi\rangle &= \lambda_2\langle\varphi|\psi\rangle \end{aligned}$$

Durch Subtraktion erhällt man

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle\varphi|\psi\rangle = 0$$

Somit sind $|\psi\rangle$ und $|\varphi\rangle$ orthogonal für $\lambda_1 \neq \lambda_2$

c) *Erster Teil:*
Sei $|\varphi\rangle$ beliebig. Da $\{|\psi_n\rangle\}$ ONS ist, lässt sich $|\varphi\rangle$ schreiben als

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle &= \sum_i c_i|\psi_i\rangle \\ \langle\psi_k|\varphi\rangle &= \sum_i c_i\langle\psi_k|\psi_i\rangle = c_i \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle &= \sum_i c_i|\psi_i\rangle \\ &= \sum_i \langle\psi_i|\varphi\rangle|\psi_i\rangle \\ &= \sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\varphi\rangle \\ &= \underbrace{\left(\sum_i \langle\psi_i|\psi_i\rangle\right)}_{=\hat{1}}|\varphi\rangle \end{aligned}$$

Zweiter Teil:

$$\sum_n \langle x|\psi_n\rangle\langle\psi_n|x'\rangle = \langle x|\hat{1}|x'\rangle = \langle x|x'\rangle = \delta(x - x')$$

d) Für den Zeitentwicklungsoperatur U gilt:

$$\begin{aligned} U(t,t') &= e^{-iH(t-t')/\hbar} \\ &= e^{-iH(t-t')/\hbar} \underbrace{\sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|}_{=\hat{1}} \qquad \text{es ist: } H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle \text{ und somit} \\ &= \sum_n e^{-iE_n(t-t')/\hbar}|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n| \end{aligned}$$

Der Feynman Propagator ist somit:

$$\begin{aligned} K(x,t,x',t') &= \langle x|\sum_n e^{-iE_n(t-t')/\hbar}|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n||x'\rangle \\ &= \sum_n \langle x|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|x'\rangle e^{-iE_n(t-t')/\hbar} \end{aligned}$$

Aufgabe 9

a) Mit dem Feynmann Propagator für ein freies Teilchen gilt:

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \int dx' \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}} \exp\left(\frac{im}{2\hbar}\frac{(x-x')^2}{t}\right)(2\pi\sigma^2)^{-1/4}\exp\left(-\frac{x'^2}{4\sigma^2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\int dx' \exp\left(\frac{im}{2\hbar}\frac{x^2-2xx'+x'^2}{t}-\frac{x'^2}{4\sigma^2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\int dx' \exp\left(\frac{im}{2\hbar t}\left(x^2-2xx'-x'^2\left(\frac{\hbar t-2im\sigma^2}{2im\sigma^2}\right)\right)\right) \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\int dx' \exp\left(-\frac{\hbar t-2im\sigma^2}{4\hbar t\sigma^2}\left(-\frac{2im\sigma^2}{\hbar t-2im\sigma^2}x^2+\frac{4im\sigma^2}{\hbar t-2im\sigma^2}xx'+x'^2\right)\right) \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\int dx' \exp\Bigg(-\frac{\hbar t-2im\sigma^2}{4\hbar t\sigma^2}\Bigg(-\frac{2im\sigma^2}{\hbar t-2im\sigma^2}x^2+\left(\frac{2im\sigma^2}{\hbar t-2im\sigma^2}x+x'\right)^2 \\ &\quad +\frac{4m^2\sigma^4}{(\hbar t-2im\sigma^2)^2}x^2\Bigg)\Bigg) \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\int dx' \exp\left(-\frac{\hbar t-2im\sigma^2}{4\hbar t\sigma^2}\left(x'^2+\left(\frac{4m^2\sigma^4-2im\sigma^2(\hbar t-2im\sigma^2)}{(\hbar t-2im\sigma^2)^2}\right)x^2\right)\right) \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt{\frac{\hbar t-2im\sigma^2}{4\hbar t\sigma^2}}}\exp\left(-\frac{2m^2\sigma^4-im\sigma^2(\hbar t-2im\sigma^2)}{2\hbar t\sigma^2(\hbar t-2im\sigma^2)}x^2\right) \\ &= \sqrt{\frac{m}{i}}\frac{\sqrt{\sigma}}{(2\pi)^{1/4}}\sqrt{\frac{2}{\hbar t-2im\sigma^2}}\exp\left(-\frac{2m^2\sigma^4-im\sigma^2(\hbar t-2im\sigma^2)}{2\hbar t\sigma^2(\hbar t-2im\sigma^2)}x^2\right) \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{m\sigma}{\hbar t-2im\sigma^2}}\exp\left(-\frac{2im}{4(\hbar t-2im\sigma^2)}x^2\right) \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{m\sigma(\hbar t+2im\sigma^2)}{\hbar^2t^2+4m^2\sigma^4}}\exp\left(-\frac{im(2\hbar t+4im\sigma^2)}{4\hbar^2t^2+16m^2\sigma^4}x^2\right) \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{m\sigma\hbar t+2im^2\sigma^3}{\hbar^2t^2+4m^2\sigma^4}}\exp\left(-\frac{im2\hbar t+4m^2\sigma^2}{\underbrace{4\hbar^2t^2+16m^2\sigma^4}_{:=d}}x^2\right) \end{aligned}$$

b) $\psi\psi^*$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\psi(x,t)\cdot\psi(x,t)^* &= m\sigma\sqrt{\frac{(\hbar^2t^2+4m^2\sigma^4)}{(\hbar^2t^2+4m^2\sigma^4)^2}}\cdot\exp\left(-\frac{2m^2\sigma^2}{\hbar^2t^2+4m^2\sigma^4}x^2\right)\\
&= \underbrace{\frac{m\sigma}{\sqrt{\hbar^2t^2+4m^2\sigma^4}}}_{:=c}\cdot\exp\left(-\frac{2m^2\sigma^2}{\hbar^2t^2+4m^2\sigma^4}x^2\right)\\
&= c\cdot\exp\left(-2c^2x^2\right)
\end{aligned}$$

Für die Unschärfe gilt:

$$\begin{aligned}
(\Delta_\psi x)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}dx\ x^2\ \psi(x,t)\psi(x,t)^* - \left[\int_{-\infty}^{\infty}dx\ x\ \psi(x,t)\psi(x,t)^*\right]^2\\
&= c\left[\int_{-\infty}^{\infty}dx\ x^2\ \exp\left(-2c^2x^2\right) - \underbrace{c\left(\int_{-\infty}^{\infty}dx\ x\exp\left(-2c^2x^2\right)\right)^2}_{=0\text{ aus Symmetriegründen}}\right]\\
&= c\int_{-\infty}^{\infty}dx\ x^2\ \exp\left(-2c^2x^2\right)\\
&= \frac{1}{c^2}\sqrt{\frac{\pi}{32}} = \sqrt{\frac{\pi}{32}}\ \frac{\hbar^2t^2+4m^2\sigma^4}{m^2\sigma^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle p\rangle_\psi &= \int dx\ \ \psi(x)^*\left[\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)\right]\\
&= \frac{\hbar}{i}\int dx\ \ \psi(x)^*\psi(x)\left[-2dx\right]\\
&= \frac{2d\hbar}{i}\int dx\ \ c\cdot\exp\left(-2c^2x^2\right)\ \ x = 0
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
(\Delta_\psi p)^2 &= \langle\hat{p}^2\rangle_\psi\\
&= \langle\psi| - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial^2 x}|\psi\rangle\\
&= \int dx\ \ \langle\psi|x\rangle\langle x| - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial^2 x}|\psi\rangle\\
&= \int dx\ \ \psi(x)^*\left[\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial^2 x}\psi(x)\right]\\
&= \hbar^2 2d\int dx\ \ \psi(x)\ \psi(x)^*\left[2dx^2-1\right]\\
&= \hbar^2 4d^2\int dx\ \ \psi(x)\ \psi(x)^*x^2 - \hbar^2 2d\int dx\ \ \psi(x)\ \psi(x)^*\\
&= \hbar^2 4d^2\frac{1}{c^3}\sqrt{\frac{\pi}{32}} - \hbar^2 d\sqrt{2\pi}
\end{aligned}$$

Das Produkt ergibt:

$$\Delta_\psi p\cdot\Delta_\psi x = \hbar\sqrt{\left(4d^2\frac{1}{c^3}\sqrt{\frac{\pi}{32}} - d\sqrt{2\pi}\right)}\frac{1}{c}\left(\frac{\pi}{32}\right)^{1/4}$$