Aufgabe 13

a) Für achsennahe Strahlen gilt $l = s$ und somit:

$$\begin{aligned}
\frac{n_1}{l_1} + \frac{n_2}{l_2} &= \frac{1}{R}\left(n_2 \frac{s_2}{l_2} - n_1 \frac{s_1}{l_1}\right) \\
\frac{n_1}{l_1} + \frac{n_2}{l_2} &= \frac{1}{R}\left(n_2 \frac{l_2}{l_2} - n_1 \frac{l_1}{l_1}\right) \\
\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} &= \frac{1}{R}\left(n_2 - n_1\right)
\end{aligned}$$

b) Es gelten folgende Bezeichnung:

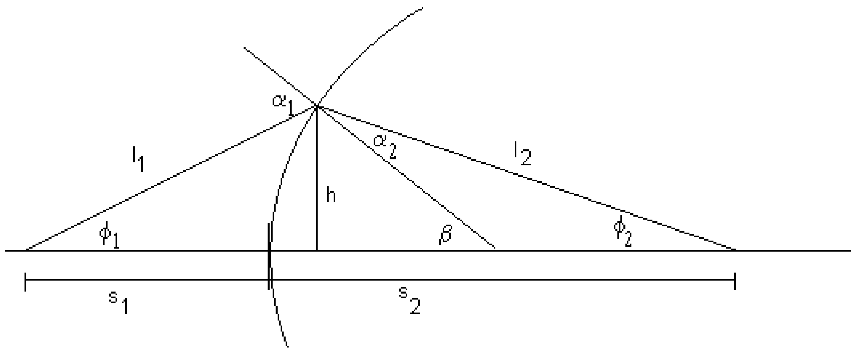

Abbildung 1: Skizze zu Aufgabe 13 b)

Es ergibt sich:

$$\alpha_1 = \phi_1 + \beta$$
$$\alpha_1 = \beta - \phi_2$$

Aus Snellius und den Additionstheoremen folgt:

$$\begin{aligned}
n_1 \sin\alpha_1 &= n_2 \sin\alpha_2 \\
n_1 \sin(\phi_1 + \beta) &= n_2 \sin(\beta - \phi_2) \\
n_1 \sin\left(\arcsin\frac{h}{l_1} + \arcsin\frac{h}{R}\right) &= n_2 \sin\left(\arcsin\frac{h}{R} - \arcsin\frac{h}{l_2}\right) \\
n_1 \frac{h}{l_1}\sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} + n_1 \frac{h}{R}\sqrt{1 + \frac{h^2}{l_1^2}} &= n_2 \frac{h}{R}\sqrt{1 + \frac{h^2}{l_2^2}} - n_2 \frac{h}{l_2}\sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} \\
n_1 \frac{1}{l_1}\sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} + n_2 \frac{1}{l_2}\sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}} &= n_2 \frac{1}{R}\sqrt{1 + \frac{h^2}{l_2^2}} - n_1 \frac{1}{R}\sqrt{1 + \frac{h^2}{l_1^2}} \\
\frac{n_1}{l_1} + \frac{n_2}{l_2} &= \frac{n_2 \frac{1}{R}\sqrt{1 + \frac{h^2}{l_2^2}} - n_1 \frac{1}{R}\sqrt{1 + \frac{h^2}{l_1^2}}}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{R^2}}} \\
\frac{n_1}{l_1} + \frac{n_2}{l_2} &= \frac{n_2}{l_2}\sqrt{\frac{l_2^2 + h^2}{R^2 + h^2}} - \frac{n_1}{l_1}\sqrt{\frac{l_1^2 + h^2}{R^2 + h^2}}
\end{aligned}$$

Mit der Taylerentwicklung (Grad 2) nach h folgt:

$$\frac{n_1}{l_1} + \frac{n_2}{l_2} = \frac{n_2}{R}\left(1 + \frac{R^2 - l_2^2}{2R^2\, l_2^2} h^2\right) - \frac{n_1}{R}\left(1 + \frac{R^2 - l_1^2}{2R^2\, l_1^2} h^2\right)$$

Die zusätzlichen Terme sind quadratisch in h, da nach h entwickelt wurde.