**Aufgabe 12**

a) Die Lagrangefunktion $L$ ist:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}Dx_1^2 - \frac{1}{2}Dx_2^2 - \frac{1}{2}D(x_1 - x_2)^2$$

b) Mit den Tensoren $M$ und $V$ gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}}_{=M} \ddot{x} = -\underbrace{\begin{pmatrix} 2D & -D \\ -D & -2D \end{pmatrix}}_{=V} x$$

c) Für das charakteristische Polynom gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \det\left(\begin{pmatrix} 2D & -D \\ -D & 2D \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\right) \\ &= 3D^2 + 4\omega^2 Dm + \omega^4 m^2 \end{aligned}$$

Die Lösungen sind $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ sowie $\omega_1^2 = \frac{3D}{m}$

d) Als Lösungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_{11}(t) &= x_{12}(t) \\ x_{21}(t) &= -x_{22}(t) \end{aligned}$$

Die allgemeinste Lösung, ist eine Linearkombination aus beiden.

e)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{a}{2}x_{11}(t) - \frac{a}{2}x_{21}(t) \\ &= \frac{a}{2}\cos(\omega_0 t) - \frac{a}{2}\cos(\omega_1 t) \\ x_2(t) &= \frac{a}{2}x_{11}(t) + \frac{a}{2}x_{21}(t) \\ &= \frac{a}{2}\cos(\omega_0 t) + \frac{a}{2}\cos(\omega_1 t) \end{aligned}$$