Aufgabe 3
a) Die Zwangsbedingung lautet:

$$G(x,z) = x^2 + z^2 - l^2 = 0$$

Bewegungsgleichungen nach Lagrange I:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2\lambda_1 x \\ m\ddot{z} &= mg + 2\lambda_1 z \end{aligned}$$

b) Die Ableitungen von $G(x,z)$ nach der Zeit sind:

$$\begin{aligned} \dot{G}(x,z) &= 2x \cdot \dot{x} + 2z \cdot \dot{z} = 0 \\ \ddot{G}(x,z) &= 2x \cdot \ddot{x} + 2\dot{x}^2 + 2z \cdot \ddot{z} + 2\dot{z}^2 = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -\frac{x \cdot \ddot{x} + \dot{x}^2 + \dot{z}^2}{z} \\ &= -\frac{x \cdot \ddot{x} + \dot{x}^2 + \left(-\frac{x\dot{x}}{z}\right)^2}{z} \\ &= -\frac{x \cdot \ddot{x} + \dot{x}^2 + \frac{x^2\dot{x}^2}{z^2}}{z} \\ &= -\frac{x \cdot \ddot{x} + \dot{x}^2 + \frac{x^2\dot{x}^2}{l^2-x^2}}{\sqrt{l^2 - x^2}} \end{aligned}$$

c) Der Lagrangemultiplikator λ_1 ist

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} m \frac{\ddot{x}}{x}$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichung für z ergibt sich:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= -m\frac{x \cdot \ddot{x} + \dot{x}^2 + \frac{x^2\dot{x}^2}{l^2-x^2}}{\sqrt{l^2 - x^2}} \\ &= mg + 2\lambda_1 z \\ &= mg + m\frac{\ddot{x}}{x}\sqrt{l^2 - x^2} \end{aligned}$$

Also ist:

$$\begin{aligned} -\frac{x \cdot \ddot{x} + \dot{x}^2 + \frac{x^2\dot{x}^2}{l^2-x^2}}{\sqrt{l^2 - x^2}} &= g + \frac{\ddot{x}}{x}\sqrt{l^2 - x^2} \\ -\left(x \cdot \ddot{x} + \dot{x}^2 + \frac{x^2\dot{x}^2}{l^2 - x^2}\right) &= g\sqrt{l^2 - x^2} + \frac{\ddot{x}}{x}\left(l^2 - x^2\right) \end{aligned}$$

d) Mit der Näherung $x \ll l$ vereinfacht sich die DGL zu:

$$\begin{aligned}
-\Bigg(x\ddot{x} + \dot{x}^2 + \underbrace{\frac{x^2\dot{x}^2}{\underbrace{l^2 - x^2}_{\approx l^2}}}_{\approx 0}\Bigg) &= g\underbrace{\sqrt{l^2 - x^2}}_{\approx l} + \frac{\ddot{x}}{x}l^2 \\
-x\ddot{x} - \dot{x}^2 &= gl + \frac{\ddot{x}}{x}l^2 \\
-x^2\ddot{x} - x\dot{x}^2 &= xgl + \ddot{x}l^2 \\
-\underbrace{\frac{x}{l}}_{\approx 0}x\ddot{x} - \underbrace{\frac{x}{l}}_{\approx 0}\dot{x}^2 &= xg + \ddot{x}l
\end{aligned}$$

Also ergibt sich als DGL für $\ddot{x}$ die gewohnte Form:

$$0 = \frac{g}{l}x + \ddot{x}$$

Der Lagrangemultiplikator $\tilde{\lambda}_1$ ist nach dieser Näherung:

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{2}m\frac{\ddot{x}}{x} = -\frac{1}{2}m\frac{g}{l}$$

Die Zwangskräfte sind also:

$$\begin{aligned}
F_x^{Zwang} &= 2\tilde{\lambda}_1 \cdot x = \frac{-mgx}{l} \\
F_z^{Zwang} &= 2\tilde{\lambda}_1 \cdot z = \frac{-mgz}{l}
\end{aligned}$$

e) Mit

$$\begin{aligned}
x &= l\sin\phi \\
\dot{x} &= l\cos\phi\dot{\phi} \\
\ddot{x} &= l\cos\phi\ddot{\phi} - l\sin\phi\dot{\phi}^2
\end{aligned}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
-\left(x\cdot\ddot{x} + \dot{x}^2 + \frac{x^2\dot{x}^2}{l^2 - x^2}\right) &= g\sqrt{l^2 - x^2} + \frac{\ddot{x}}{x}\left(l^2 - x^2\right) \\
-\left(l^2\sin\phi\cdot(-\sin\phi\dot{\phi}^2 + \cos\phi\ddot{\phi}) + l^2\cos^2\phi\dot{\phi}^2 + \frac{l^4\sin^2\phi\cdot\cos^2\phi\dot{\phi}^2}{l^2 - l^2\sin^2\phi}\right) & \\
&= g\sqrt{l^2 - l^2\sin^2\phi} + \frac{\cos\phi\ddot{\phi} - \sin\phi\dot{\phi}^2}{\sin\phi}\left(l^2 - l^2\sin^2\phi\right) \\
-\left(\sin\phi\cdot(-\sin\phi\dot{\phi}^2 + \cos\phi\ddot{\phi}) + \cos^2\phi\dot{\phi}^2 + \sin^2\phi\dot{\phi}^2\right) & \\
&= \frac{g}{l}\sqrt{1 - \sin^2\phi} + \frac{\cos\phi\ddot{\phi} - \sin\phi\dot{\phi}^2}{\sin\phi}\left(1 - \sin^2\phi\right) \\
-\left(\sin\phi\cdot(-\sin\phi\dot{\phi}^2 + \cos\phi\ddot{\phi}) + \dot{\phi}^2\right) &= \frac{g}{l}\cos\phi - \cos^2\phi\dot{\phi}^2 + \frac{\cos^3\phi\ddot{\phi}}{\sin\phi} \\
\sin^2\phi\dot{\phi}^2 - \sin\phi\cos\phi\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2 &= \frac{g}{l}\cos\phi - \cos^2\phi\dot{\phi}^2 + \frac{\cos^3\phi\ddot{\phi}}{\sin\phi} \\
\dot{\phi}^2 - \sin\phi\cos\phi\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2 &= \frac{g}{l}\cos\phi + \frac{\cos^3\phi\ddot{\phi}}{\sin\phi} \\
-\sin^2\phi\ddot{\phi} &= \frac{g}{l}\sin\phi + \cos^2\phi\ddot{\phi} \\
0 &= \frac{g}{l}\sin\phi + \ddot{\phi}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4
Die Zwangsbedingung f_1 lautet ($y = 0$ ist trivial und wird weiter nicht berücksichtigt):

$$\begin{aligned}
x &= s \cdot \cos\alpha + R(t) \\
z &= s \cdot \sin\alpha \\
\Rightarrow \quad x &= z \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + R(t) \\
\Rightarrow \quad 0 &= \frac{z}{\tan\alpha} + R(t) - x = f_1
\end{aligned}$$

Nach Lagrange I gilt:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -\lambda_1 \\
m\ddot{z} &= -mg + \frac{\lambda_1}{\tan\alpha}
\end{aligned}$$

Mit der Zwangsbedingung zusammen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\ddot{z} &= -g - \frac{\ddot{x}}{\tan\alpha} \\
&= -g - \frac{\ddot{R}(t) + \frac{\ddot{z}}{\tan\alpha}}{\tan\alpha} \\
&= -g - \frac{\ddot{R}(t)}{\tan\alpha} - \frac{\ddot{z}}{\tan^2\alpha} \\
\left(1 + \frac{1}{\tan^2\alpha}\right)\ddot{z} &= -g - \frac{\ddot{R}(t)}{\tan\alpha} \\
\ddot{z} &= \left(-g - \frac{\ddot{R}(t)}{\tan\alpha}\right)\sin^2\alpha \\
\dot{z} &= \left(-gt - \frac{\dot{R}(t)}{\tan\alpha}\right)\sin^2\alpha \\
z &= \left(-\frac{1}{2}gt^2 - \frac{R(t)}{\tan\alpha}\right)\sin^2\alpha \\
x &= \left(-\frac{1}{2}gt^2 - \frac{R(t)}{\tan\alpha}\right)\frac{\sin^2\alpha}{\tan\alpha} + R(t) \\
&= -\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha R(t)
\end{aligned}$$

Damit die Masse auf dem Wagen ruht, muss $\ddot{z} = 0$ sein, und somit:

$$\ddot{R}(t) = -g\tan\alpha$$

Der Wagen beschleunigt also konstant in Richtung $-x$ mit der Beschleunigung $a = -g\tan\alpha$:

$$R(t) = \frac{1}{2}at^2$$

(Alle aufgetretenen Integrationskonstanten wurden gleich null gesetzt.)