Aufgabe 15

$$\begin{aligned}
< T_k, T_l > &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos(k \arccos x)\ \cos(l \arccos x) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos((k-l) \arccos x) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos((k+l) \arccos x) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{\sin t} \cos((k-l)t)(-\sin t) dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} \frac{1}{\sin t} \cos((k+l)t)(-\sin t) dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sin((k-l)t)}{k-l} \Big|_0^\pi + \frac{1}{2} \frac{\sin((k+l)t)}{k-l} \Big|_0^\pi = \delta_{lk}
\end{aligned}$$

Aufgabe 17

Es ist nach Satz 2.4.2:

$$f(x) - p(x) = (x-x_0)^2 (x-x_1)^2 \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$$

Mit $x_1 - x_0 = h$ und $a = x_1 - x$ gilt:

$$(x-x_0)(x-x_1) = a(h-a) \leq \frac{1}{4} h^2$$

Somit ist:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{384} \max_{\xi \in [x_0, x_1]} \left| f^{(4)}(\xi) \right|$$