Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
b_i &= \int_0^1 l_i(x)dx \\
&= \int_0^1 \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} \frac{x-c_j}{c_i-c_j}dx \\
&= \int_0^1 \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} \frac{x-(1-c_{s+1-j})}{1-c_{s+1-i}-(1-c_{s+1-j})}dx \\
&= \int_0^1 \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} \frac{(x-1)+c_{s+1-j}}{-c_{s+1-i}+c_{s+1-j}}dx \\
&= \int_1^0 \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} \frac{(x-1)+c_{s+1-j}}{c_{s+1-i}-c_{s+1-j}}dx \qquad y=-(x-1) \\
&= \int_0^1 \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} \frac{-y+c_{s+1-j}}{c_{s+1-i}-c_{s+1-j}}(-1)\cdot dy \\
&= \int_0^1 \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} \frac{y-c_{s+1-j}}{c_{s+1-i}-c_{s+1-j}}dy \qquad k=s+1-j \\
&= \int_0^1 \prod_{\substack{k=1\\ k\neq s+1-i}}^{s} \frac{y-c_k}{c_{s+1-i}-c_k}dy \\
&= b_{s+1-i}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Wähle $c_2 = \frac{1}{2}$. Somit ist die QF symmetrisch.

$$\begin{aligned}
b_1 &= \int_0^1 l_1(x)dx \\
&= \int_0^1 \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{3} \frac{x-c_j}{c_1-c_j}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{x-c_2}{c_1-c_2}\frac{x-c_3}{c_1-c_3}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{x-\frac{1}{2}}{0-\frac{1}{2}}\cdot\frac{x-1}{0-1}\,dx \\
&= \int_0^1 (-2x+1)\cdot(1-x)\,dx = \int_0^1 2x^2-3x+1\,dx \\
&= \left[\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x\right]_0^1 = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Nach Aufgabe 1 gilt $b_3 = b_1 = \frac{1}{6}$. Es ist $\sum b_i = 1$ und somit ist $b_2 = \frac{2}{3}$.

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{6}\left(0^{q-1}+1^{q-1}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{q-1} = \frac{1}{6}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{q-1} = \frac{1}{q}$$

Die Gleichung ist erfüllt für $q = 1,2,3,4$. Somit hat die QF die Ordnung $p = 4$.

Aufgabe 3

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^{q-1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^{q-1}\right) = \frac{1}{q}$$

Die Gleichung ist erfüllt für $q = 1, 2, 3, 4$. Somit hat auch diese QF die Ordnung $p = 4$.

Aufgabe 4

a) Nach Satz 1 gilt die Behauptung, da:

$$\begin{aligned}
C_2 = \int_0^1 |K_2(\tau)|\,d\tau &= \int_0^1 \left|\frac{(1-\tau)^2}{2!} - \sum_{i=1}^{2} \frac{b_i(c_i-\tau)_+^1}{1!}\right| d\tau \\
&= \int_0^1 \left|\frac{(1-\tau)^2}{2} - b_1(c_1-\tau)_+ - b_2(c_2-\tau)_+\right| d\tau \\
&= \int_0^1 \left|\frac{(1-\tau)^2}{2} - \frac{1}{2}(-\tau)_+ - \frac{1}{2}(1-\tau)_+\right| d\tau \\
&= \int_0^1 \left|\frac{1-2\tau+\tau^2}{2} - \frac{1}{2}(1-\tau)\right| d\tau \\
&= \int_0^1 \left|\frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{2}\tau\right| d\tau = -\left[\frac{1}{6}\tau^3 - \frac{1}{4}\tau^2\right]_0^1 = -\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

b) Wiederum gilt die Behauptung nach Satz 1, da:

$$\begin{aligned}
C_2 = \int_0^1 |K_2(\tau)|\,d\tau &= \int_0^1 \left|\frac{(1-\tau)^2}{2!} - \sum_{i=1}^{1} \frac{b_i(c_i-\tau)_+^1}{1!}\right| d\tau \\
&= \int_0^1 \left|\frac{(1-\tau)^2}{2} - b_1(c_1-\tau)_+\right| d\tau \\
&= \int_0^1 \left|\frac{(1-\tau)^2}{2} - (\frac{1}{2}-\tau)_+\right| d\tau \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left|\frac{(1-\tau)^2}{2} - (\frac{1}{2}-\tau)\right| d\tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left|\frac{(1-\tau)^2}{2}\right| d\tau \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left|\frac{1}{2}\tau^2\right| d\tau + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left|\frac{1}{2} - \tau + \frac{1}{2}\tau^2\right| d\tau \\
&= \left[\frac{1}{6}\tau^3\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{2}\tau - \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^3\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \left[\frac{1}{6}\tau^3\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}\tau - \frac{1}{2}\tau^2\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

Programmieraufgabe 1

Zur Frage, warum die Fehlerkurven im gezeichneten Diagramm annähernd Geraden mit der Steigung $p = 1, 2, 4$ sind:

$$\begin{aligned}
\log(E_{ges}) &\leq \log\left((b-a)\cdot C_p \cdot h^p \cdot \max_{x\in I}\left|f^{(p)}(x)\right|\right) \\
&= \log\left(const \cdot h^p\right) \qquad\qquad x = \log(h)\,, 10^x = h \\
&= \log\left(const \cdot 10^{xp}\right) = \log\left(const\right) + x\cdot p = a + x\cdot b = f(x)
\end{aligned}$$