Proseminar Analyis
Wavelets und Filter

Hanno Rein
http://hanno-rein.de

Universität Tübingen
Wintersemester 2004/2005

Made with LaTeX

Wiederholung

- **Dilation Equation**

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sqrt{2}\sum_{k=0}^{D-1} a_k \phi(2x-k) \\ a_k &= \int \phi(x)\phi_{1,k}(x)dx \end{aligned}$$

- **Wavlet Equation**

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sqrt{2}\sum_{k=0}^{D-1} b_k \psi(2x-k) \\ b_k &= \int \psi(x)\phi_{1,k}(x)dx \end{aligned}$$

Orthonormalität

Nach Axiom (c) der Multiskalenanalyse ist $\{\phi(x-k)\}_{k\in Z}$ eine Orthonomalbasis für V_0. Somit ist

$$\delta_{0,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\phi(x-n)dx$$

Setzt man nun die *Dilation Equation* ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta_{0,n} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{2}\sum_{k=0}^{D-1} a_k\phi(2x-k)\right)\left(\sqrt{2}\sum_{l=0}^{D-1} a_l\phi(2(x-n)-l)\right)dx \\ &= 2\sum_{l=0}^{D-1}\sum_{k=0}^{D-1} a_l a_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-k)\phi(2(x-n)-l)dx \\ &= \sum_{l=0}^{D-1}\sum_{k=0}^{D-1} a_l a_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\phi(y+k-2n-l)dy \\ &= \sum_{l=0}^{D-1}\sum_{k=0}^{D-1} a_l a_k \delta_{0,k-2n-l} \\ &= \sum_{l=0}^{D-1}\sum_{k=0}^{D-1} a_l a_k \delta_{l,k-2n} = \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=\max(0,2n)}^{\min(D-1,D-1+2n)} a_{k-2n}a_k = \delta_{0,n}} \qquad (1)$$

Außerdem gilt

$$\delta_{0,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\psi(x-n)dx$$

Nach identischer Rechnung folgt:

$$\boxed{\sum_{k=\max(0,2n)}^{\min(D-1,D-1+2n)} b_{k-2n}b_k = \delta_{0,n}} \qquad (2)$$

Es ergeben sich $D/2$ Gleichungen, da die Summe trivial ist für $n \notin [0, D/2-1]$.

Conservation of Area

Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx < \infty$$

Integriert man die *Dilation Equation* auf beiden Seiten, so erhällt man

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2} \sum_{k=0}^{D-1} a_k \phi(2x-k)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=0}^{D-1} a_k \phi(y)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{D-1} a_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)dy
\end{aligned}$$

Also ist

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{D-1} a_k = 1 \qquad (3)}$$

Vanishing moments

Die Scaling-Function kann ein Polynom x^p bis zu einem Grad $P-1$ exakt darstellen:

$$x^p = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M_k^p \cdot \phi(x-k) \ , \quad p = 0, ...P-1 \tag{4}$$

Hierbei ist M_k^p das sogenannte p-te Moment von $\phi(x-k)$.
$*$ Zum Begriff Moment: für x^1 erhällt man Erwartungswert, für x^2 die Varianz, Schiefe, Wölbung,...
Es gilt

$$M_k^p = \int_{-\infty}^{+\infty} x^p \cdot \phi(x-k)dx$$

Da ϕ und ψ orthogonal sind, ergibt sich Gleichung (4), durch die Bildung des inneren Produkts mit ψ auf beiden Seiten, zu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^p \psi(x)dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M_k^p \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x-k)\psi(x)dx = 0$$

Durch Einsetzen der Wavlet Equation ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^p \psi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^p \sqrt{2} \sum_{k=0}^{D-1} b_k \phi(2x-k)dx \ , \qquad y = 2x-k \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{y+k}{2}\right)^p \sqrt{2} \sum_{k=0}^{D-1} b_k \phi(y) \cdot \frac{dy}{2} \\
&= \sqrt{2} \sum_{k=0}^{D-1} b_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}} (y+k)^p \phi(y)dy \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2^{p+1}} \sum_{k=0}^{D-1} b_k \int_{-\infty}^{+\infty} (y+k)^p \phi(y)dy \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2^{p+1}} \sum_{k=0}^{D-1} b_k \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} y^{p-n} k^n \right) \phi(y)dy \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2^{p+1}} \sum_{k=0}^{D-1} \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} k^n b_k \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y^{p-n} \phi(y)dy}_{=M_0^{p-n}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2^{p+1}} \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} M_0^{p-n} \sum_{k=0}^{D-1} k^n b_k \\
\Leftrightarrow & \sum_{n=0}^{p} c_{p,n} \cdot \sum_{k=0}^{D-1} k^n b_k = 0
\end{aligned}$$

Für $p = 0$ ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^{D-1} b_k = 0$$

Allgemein gilt somit (Induktion):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{D-1} b_k k^p \\ &= \sum_{k=0}^{D-1} (-1)^k a_{D-1-k} k^p \qquad \text{mit } k = D-1-l \\ &= \sum_{l=0}^{D-1} (-1)^{D-1-l}\, a_l (D-1-l)^p \end{aligned}$$

Für $p = 0$ gilt:

$$0 = \sum_{l=0}^{D-1} (-1)^{D-1-l}\, a_l = \cancel{(-1)^{D-1}} \sum_{l=0}^{D-1} (-1)^l\, a_l$$

Für $p = 1$:

$$0 = \sum_{l=0}^{D-1} (-1)^{D-1-l}\, a_l\, (D-1-l) = \cancel{\left[\sum_{l=0}^{D-1} (-1)^{D-1-l}\, a_l\right]} (D-1) - \sum_{l=0}^{D-1} (-1)^{D-1-l}\, a_l\, l$$

Für ein beliebiges p:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l=0}^{D-1} (-1)^{D-1-l}\, a_l\, (D-1-l)^p = \sum_{l=0}^{D-1} (-1)^{D-1-l}\, a_l \left[\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{n} (D-1)^{p-k}\, l^k\right] \\ &= \sum_{l=0}^{D-1} (-1)^{D-1-l}\, a_l \left[\binom{p}{p} (D-1)^{p-p}\, l^p + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{n} (D-1)^{p-k}\, l^k\right] \\ &= \sum_{l=0}^{D-1} (-1)^{D-1-l}\, a_l\, l^p + \cancel{\sum_{l=0}^{D-1} (-1)^{D-1-l}\, a_l \left[\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{n} (D-1)^{p-k}\, l^k\right]} \end{aligned}$$

Somit gilt für $p = 0, 1, ...P-1$:

$$\boxed{0 = \sum_{l=0}^{D-1} (-1)^l\, a_l\, l^p} \tag{5}$$

Decay of wavlet coefficients

Satz:
Sei $P = \frac{1}{2}D$ die Anzahl der vanishing moments eines Wavlets $\psi_{j,k}$. Für die Wavlet-Koeffizienten gilt:

$$|d_{j,k}| \leq C_P \; 2^{-j(P+\frac{1}{2})} \max_{\xi \in I_{j,k}} \left| f^{(P)}(\xi) \right|$$

Mit $I_{j,k} = [k/2^j, (k+D-1)/2^j]$. C_P ist eine Konstante, die unabhängig von j, k und f ist.

Beweis:
Die Taylerentwicklung einer Funktion f innerhalb des Interfalls $I_{j,k}$ um den Punkt $x_0 = k/2^j$ ist:

$$f(x) = \left(\sum_{p=0}^{P-1} f^(p)(k/2^j) \frac{(x - \frac{k}{2^j})^p}{p!} \right) + f^{(P)}(\xi) \frac{(x - \frac{k}{2^j})^P}{P!} \qquad \xi \in [k/2^j, x]$$

Setzt man das in die Definitionsgleichung der Waveletkoeffizienten d ein, so gilt:

$$\begin{aligned} d_{j,k} &= \int_{I_{j,k}} f(x) \psi_{j,k}(x) dx \\ &= \left(\sum_{p=0}^{P-1} f^{(p)}(k/2^j) \frac{1}{p!} \underbrace{\int_{I_{j,k}} \left(x - \frac{k}{2^j} \right)^p \psi_{j,k}(x) dx}_{:=X} \right) + \frac{1}{P!} \int_{I_{j,k}} f^{(P)}(\xi) \left(x - \frac{k}{2^j} \right)^P \psi_{j,k}(x) dx \end{aligned}$$

Für X gilt:

$$\begin{aligned} X &= \int_{k/2^j}^{(k+D-1)/2^j} \left(x - \frac{k}{2^j} \right)^p 2^{j/2} \psi(2^j x - k) dx \\ &\overset{y=2^j x-k}{=} 2^{j/2} \int_0^{D-1} \left(\frac{y}{2^j} \right)^p \psi(y) 2^{-j} dy \\ &= c \cdot \int_0^{D-1} y^p \psi(y) dy \qquad \text{bereits gezeigt: } \int x^p \psi(x) dx = 0 \\ &= 0 \quad \text{für } p = 0, 1 ... P-1 \end{aligned}$$

Also ist:

$$\begin{aligned} |d_{j,k}| &= \frac{1}{P!} \left| \int_{I_{j,k}} f^{(P)}(\xi) \left(x - \frac{k}{2^j} \right)^P 2^{j/2} \psi(2^j x - k) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{P!} \max_{\xi \in I_{j,k}} \left| f^{(P)}(\xi) \right| \int_{I_{j,k}} \left| \left(x - \frac{k}{2^j} \right)^P 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \right| dx \\ &= 2^{-j(P+1/2)} \frac{1}{P!} \max_{\xi \in I_{j,k}} \left| f^{(P)}(\xi) \right| \underbrace{\int_0^{D-1} \left| y^P \psi(y) \right| dy}_{:=C_P} \end{aligned}$$

Beispiele

Beispiel für $D = 4$:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= a_0\phi(2x) + a_1\phi(2x-1) + a_2\phi(2x-2) + a_3\phi(2x-3). \\ \psi(x) &= b_0\phi(2x) + b_1\phi(2x-1) + b_2\phi(2x-2) + b_3\phi(2x-3) \\ &= a_3\phi(2x) - a_2\phi(2x-1) + a_1\phi(2x-2) - a_0\phi(2x-3) \end{aligned}$$

Denn es gilt:

$$b_k = (-1)^k a_{3-k}$$

Auf Grund der Conservation of Area gilt:

$$\sum_{k=0}^{D-1} a_k = 2 \tag{6}$$

$$= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \tag{7}$$

Aus den Vanishing Moments muss gelten:

$$\sum_{k=0}^{D-1} (-1)^k a_k k^p = 0 \qquad p = 0, 1, ...P-1$$

Für $p = 0$:

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \tag{8}$$

Aus (8) und (7) folgt:

$$a_0 + a_2 = a_1 + a_3 = 1$$

Man hat also nur noch zwei Freiheitsgrade. Setze:

$$a_0 = even, a_1 = 1 - odd, a_2 = 1 - even, a_3 = odd$$

Außerdem muss gelten:

$$\sum_{k=\max(0,2n)}^{\min(D-1,D-1+2n)} a_{k-2n} a_k = 2\delta_{0,n} \quad n = 0, 1$$

Also ($n = 1$):

$$\begin{aligned} 2 &= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \\ &= even^2 + (1-odd)^2 + (1-even)^2 + odd^2 \\ &= even^2 + 1 - 2odd + odd^2 + 1 - 2even + even^2 + odd^2 \\ &= 2even^2 + 2 - 2odd - 2even + 2odd^2 \\ \Leftrightarrow & \\ 0 &= even(1-even) + odd(1-odd) \end{aligned}$$

Für $n = 2$

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 a_2 + a_1 a_3 \\ &= even(1-even) + odd(1-odd) \end{aligned}$$