

Praktikum II  
PT: Potentialtrog  
Betreuer: Waldemar Kaiser

Hanno Rein  
praktikum2@hanno-rein.de

Florian Jessen  
florian.jessen@student.uni-tuebingen.de

19. April 2004

## 1 Vorwort

Der Verlauf von Feldlinien zwischen verschiedenen Ladungsträgern ist häufig in der Praxis von großer Bedeutung. Allerdings kann der Verlauf nur in einzelnen Spezialfällen analytisch beschrieben werden. In diesem Versuch wird der Feldlinienverlauf experimentell bestimmt.

## 2 Physikalische Grundlagen

### 2.1 Messprinzip

Das Elektrolyt (in unserem Fall Leitungswasser) dient dazu, dass das Potential als Spannungsabfall zu einer Elektrode an einem beliebigen Punkt in der Ebene gemessen werden kann. Da durch ein direktes Spannungsmessgerät ein Strom fließen würde, der selbst den Potentialverlauf verändert, verwendet man zur Messung eine Wheatstonesche Brückenschaltung. Mit Hilfe eines Spannungsteilers legt man die Messsonde auf ein Potential  $U_{mess}$ . Tastet man nun mit der Messsonde den Trog ab, und misst den Strom, der über die Messsonde fließt, so stellt man fest, dass es auf bestimmten Linien (Äquipotentiallinien) ein Minimum des Stroms gibt. Es fließt also praktisch kein Strom, und somit hat der untersuchte Punkt das Potential  $U_{mess}$ . Mit Hilfe dieser Äquipotentiallinien kann man dann auch auf die Feldlinien zurückschließen.

### 2.2 Elektrisches Potential

Das elektrische Feld  $E$  ist ein konservatives Kraftfeld. Man kann also zu jedem Punkt  $P$  im Raum eine Funktion  $\phi$  definieren, so dass gilt:

$$E = -\nabla\phi \quad (1)$$

$$\phi(P) = \int_P^\infty E \, ds \quad (2)$$

Zur Normierung wird  $P(\infty) = 0$  gesetzt. Die Differenz zweier Potentiale wird als elektrische Spannung bezeichnet.

### 2.3 Nabla Operator

Der Nabla Differentialoperator ist definiert als

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

- Wendet man ihn auf eine skalare Funktion  $f(x, y, z)$  an, so ist  $\vec{\nabla}f$  der Gradient der Funktion:

$$\vec{\nabla}f = \text{grad} \vec{f} \quad (4)$$

Der Gradient zeigt immer in die Richtung der stärksten Änderung. Der Gradient des Schwerfeldes der Erde zeigt beispielsweise Richtung Erdmittelpunkt.

- Multipliziert man den Nabla Operator (über das Skalarprodukt) mit einem Vektorfeld  $\vec{f}(x, y, z)$ , so erhält man die Divergenz des Feldes:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \text{div} \vec{f} \quad (5)$$

Das Ergebnis ist ein Skalar und beschreibt anschaulich die Anzahl der Senken und Quellen in einem infinitesimal kleinen Volumen. Da beispielsweise die Feldlinien beim Magnetfeld  $\vec{B}$  immer geschlossen sind, gilt hier:

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (6)$$

Für das elektrische Feld  $E$  gilt dies natürlich nicht. Hier ist

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (7)$$

- Es gibt neben dem Skalarprodukt noch die Möglichkeit den Nabla Operator über das Kreuzprodukt an ein Vektorfeld  $\vec{f}$  anzuwenden. Man erhält die Rotation von  $\vec{f}$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \text{rot} \vec{f} \quad (8)$$

Die Rotation beschreibt anschaulich das Vorhandensein von Wirbeln in einem Vektorfeld. Das statische elektrische Feld  $\vec{E}$  hat keine Wirbel. Es ist also:

$$\text{rot} \vec{E} = 0 \quad (9)$$

- Wendet man den Nabla Operator zweimal hintereinander an, so erhält man den sogenannten Laplace- oder Deltaoperator  $\vec{\Delta}$ :

$$\vec{\nabla}^2 = \vec{\Delta} \quad (10)$$

Dieser findet man beispielsweise in der Laplace-Gleichung wieder.

## 2.4 Satz von Gauss

Ist  $\vec{f}(x, y, z)$  eine vektorielle Funktion, so gilt bei einer geschlossenen Fläche  $S$  die das Volumen  $V_S$  umschließt:

$$\int_{V_S} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \, dV = \int_S \vec{f} \, d\vec{A} \quad (11)$$

## 2.5 Laplace Gleichung

Für das elektrische Potential gilt Gleichung (1). Mit Hilfe des Gaußschen Satzes erhält man:

$$\int_S \vec{E} \, d\vec{A} = \int_{V_S} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dV \quad (12)$$

Nach Gleichung (7) gilt:

$$\int_{V_S} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dV = \int_{V_S} \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dV \quad (13)$$

$$\int_{V_S} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dV = 0 \quad (14)$$

Da es sich um ein Volumenintegral über eine skalare Größe handelt, muss auch gelten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (15)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (16)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \cdot \phi) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (17)$$

Mit Hilfe des Laplace Operators erhält man schließlich die Poisson Gleichung:

$$-\Delta \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (18)$$

Im Vakuum, und in gewisser Näherung auch beim vorliegenden Versuch im Trog zwischen den Elektroden, gibt es keine Raumladungen ( $\rho = 0$ ). Somit vereinfacht sich die Poisson Gleichung zur Laplace Gleichung:

$$-\Delta \phi = 0 \quad (19)$$

### 3 Auswertung

#### 3.1 Anordnung 1

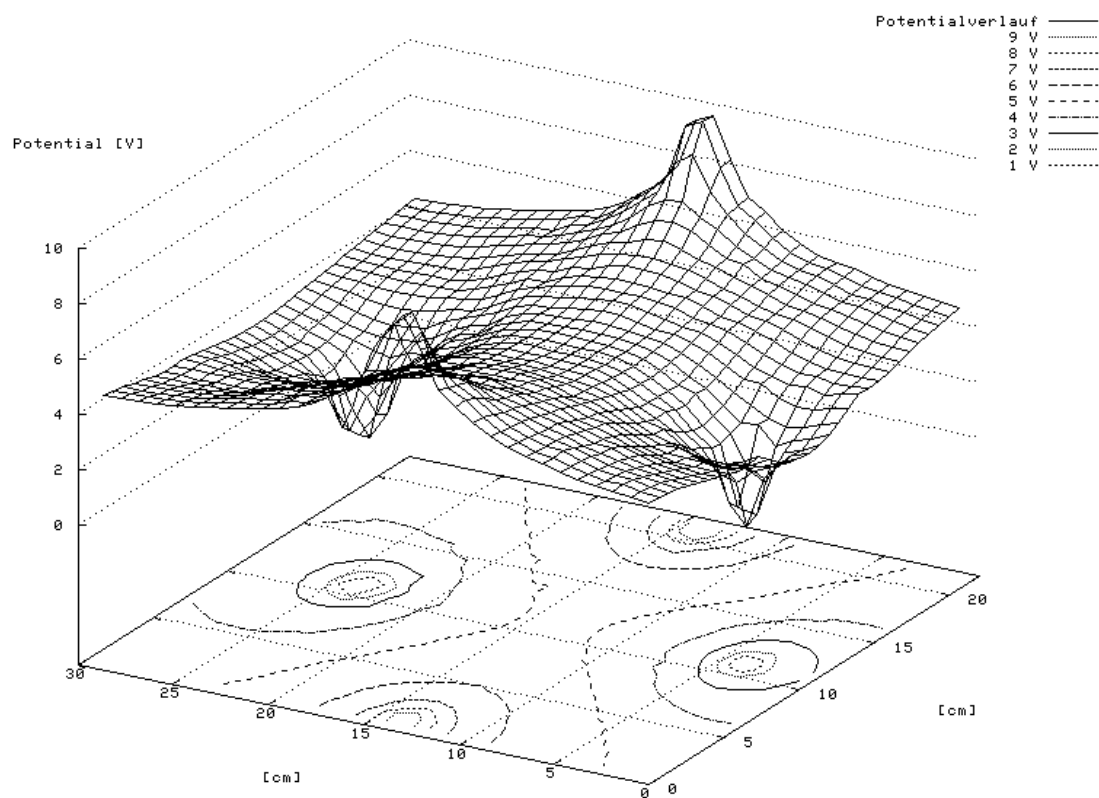


Abbildung 1: 3D-Potentialverlauf mit Äquipotentiallinien beim Quadrupol

Für das Schaubild wurden die Messwerte digitalisiert und mit Hilfe einer Griddingfunktion zu einem kontinuierlichen Netz interpoliert. Mit Hilfe dieses Netzes und einer Projektion in die Ebene kann auch der Verlauf der Äquipotentiallinien dargestellt werden.

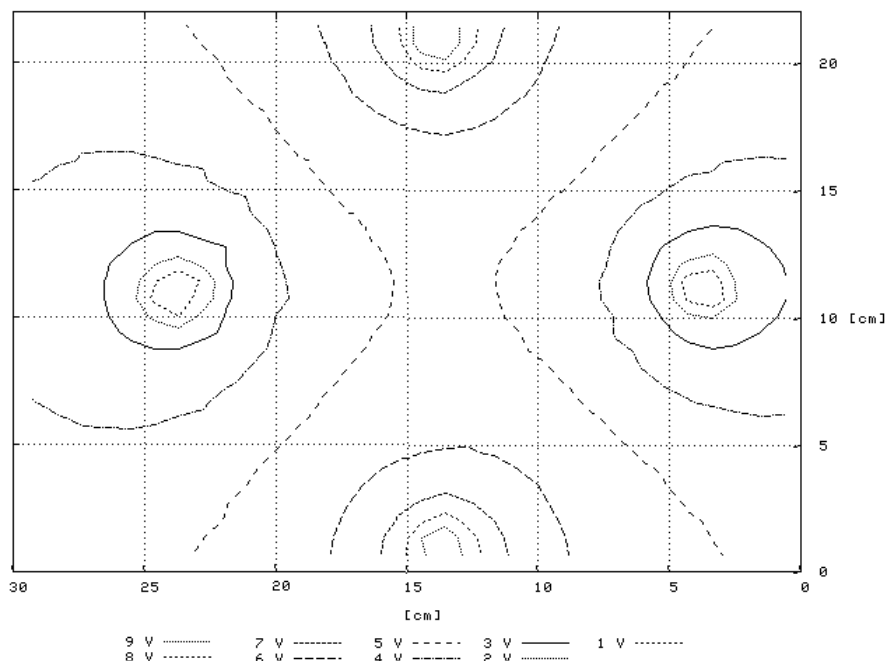


Abbildung 2: Äquipotentiallinien beim Quadrupol

Mit Hilfe der Beziehung  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$  kann aus dem Potentialverlauf auf das elektrische Vektorfeld geschlossen werden. Hierzu wurden numerisch die Differenzenquotienten für jede Raumrichtung (in unserem Fall 2) zwischen 6 Gitterpunkten der Potentialmatrix berechnet. Der Quellcode des Programms ist im Anhang aufgeführt. Für die Anordnung 1 erhält man folgendes  $\vec{E}$ -Vektorfeld, wobei die Länge der Vektoren proportional zur Stärke des  $\vec{E}$ -Feldes sind:

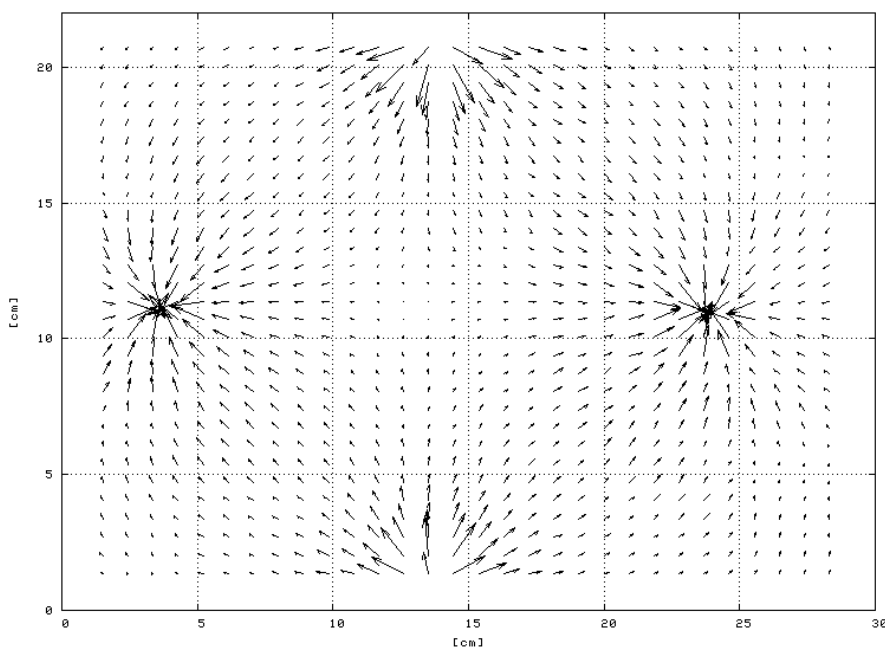


Abbildung 3:  $\vec{E}$ -Feldvektoren beim Quadrupol

Die Messwerte übertreffen unsere erwartete Genauigkeit.

### 3.2 Anordnung 2

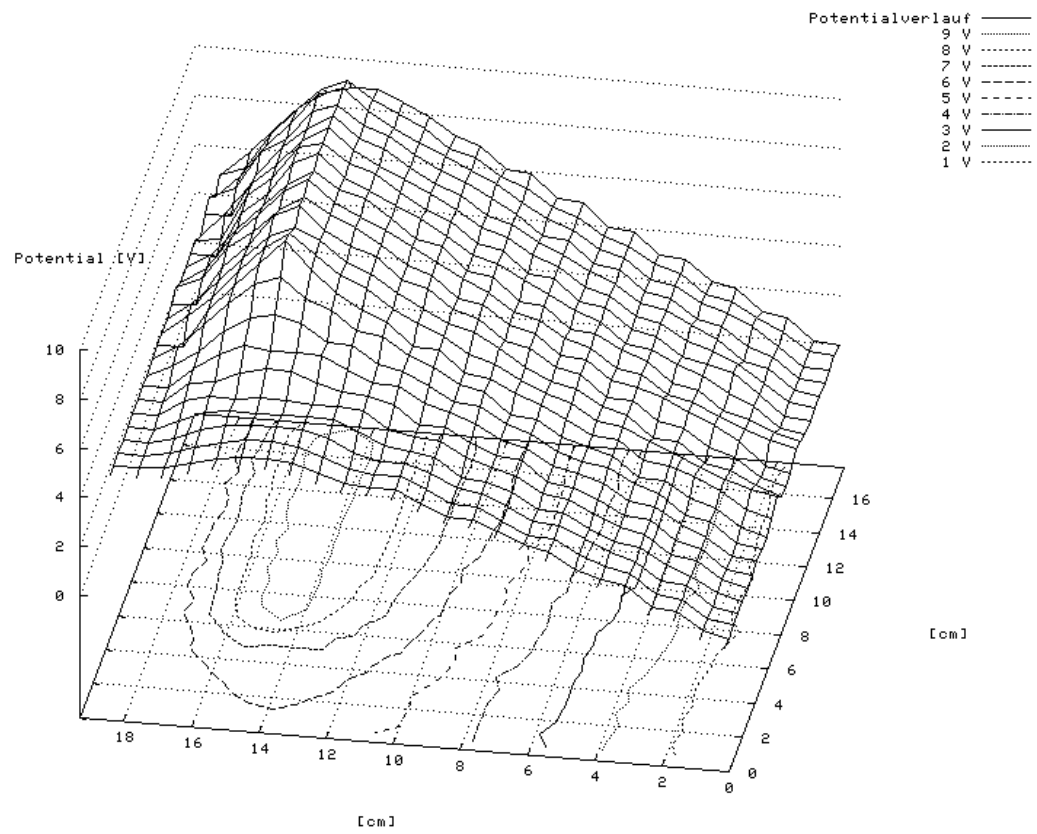


Abbildung 4: 3D-Potentialverlauf mit Äquipotentiallinien bei Elektrodenanordnung 2

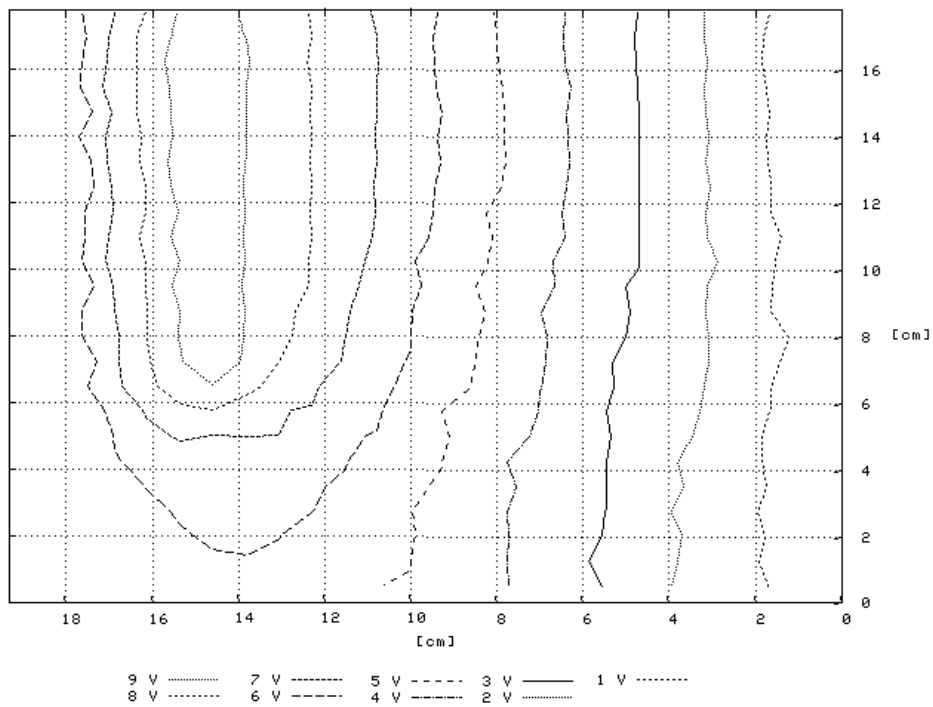


Abbildung 5: Äquipotentiallinien bei Elektrodenanordnung 2

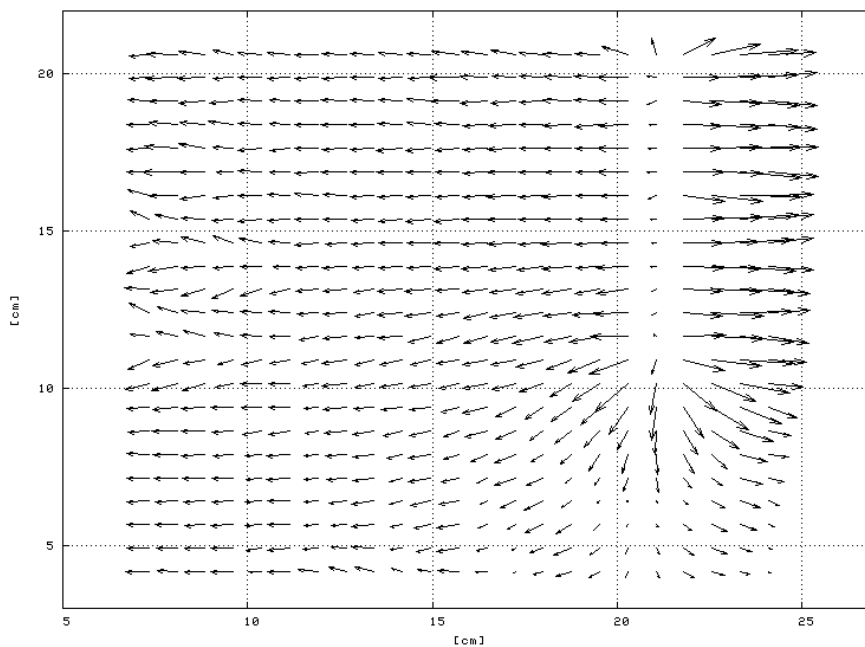


Abbildung 6:  $\vec{E}$ -Feldvektoren bei Elektrodenanordnung 2

Die Stufenbildung beim Potentialverlauf ergibt sich dadurch, dass nur Äquipotentiallinien vermessen wurden und somit Zwischenwerte interpoliert werden mussten. Trotzdem zeigen die Messwerte den erwarteten Verlauf des Feldes.

### 3.3 Dipol

Unsere Messung, sowie die Theorie ergab folgenden Potentialverlauf:

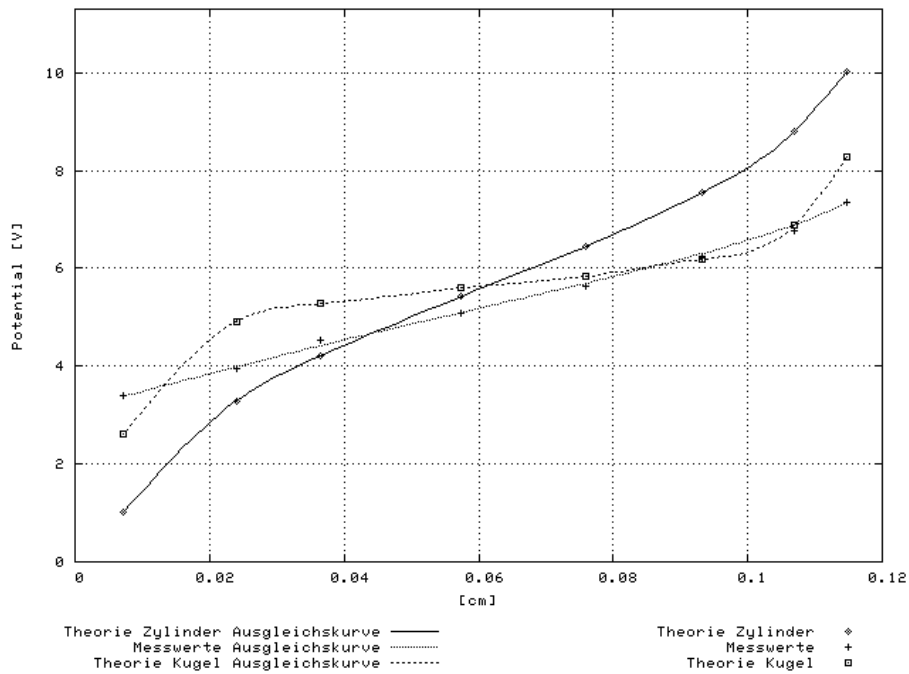


Abbildung 7: Potentialverlauf Dipol

Die Abweichungen von den theoretischen Werten lassen sich erklären durch:

- ungenaue Messung
- Messung nicht genau auf der Verbindungslinie
- Annäherung weder durch Kugel noch durch Zylinder ideal
- Störeffekte an Grenzflächen wie Wand, Wasseroberfläche
- Störeffekte durch Zuleitungen
- Elektrolyt ist ein Dielektrikum (Wasser ist ein Dipol)
- Kriechströme im Elektrolyt verändern das Feld
- möglicherweise weitere Störungen durch die verwendete Wechselspannung



## Anhang

### Sourcecode E-Feld-Berechnung

```

<?php
echo "start_matrix_creation...<br>";
$datei = file("./plot1.txt");
$filename = "output1.txt";
$max = count($datei);
$anzahl=0;
$x = array();
$y = array();
for ($i=0;$i<$max;$i++){
    $zeile = trim($datei[$i]);
    if ($zeile!="&&$zeile{0}!="#{"){
        $zeile = explode(" ", $zeile);
        $anzahl++;
        #echo $zeile[0]." ".$zeile[2]." ".$zeile[4]."<br>";
        $matrix[trim($zeile[0])][trim($zeile[2])] = trim($zeile[4]);
        if (!in_array(trim($zeile[0]), $x)){
            $x[] = trim($zeile[0]);
        }
        if (!in_array(trim($zeile[2]), $y)){
            $y[] = trim($zeile[2]);
        }
    }
}
ksort($matrix);
sort($x);
sort($y);
#print_r($matrix);
#print_r($x);
#print_r($y);

echo "matrix_creation_progress_done: $anzahl_entries_added!<br>";
echo "start_calculation_of_electric_field...<br>";
$max_x = count($x);
$max_y = count($y);
$anzahl = 0;
for ($i=1;$i<$max_x-1;$i++){
    for ($j=1;$j<$max_y-1;$j++){
        #echo $matrix[$x[$i]][$y[$j]]."<br>";
        $cal1 = $matrix[$x[$i+1]][$y[$j]];
        $cal1 += 1/sqrt(2)*$matrix[$x[$i+1]][$y[$j-1]];
        $cal1 += 1/sqrt(2)*$matrix[$x[$i+1]][$y[$j+1]];
        $cal1 *= 1/(2/sqrt(2)+1);
        $cal2 = $matrix[$x[$i-1]][$y[$j]];
        $cal2 += 1/sqrt(2)*$matrix[$x[$i-1]][$y[$j-1]];
        $cal2 += 1/sqrt(2)*$matrix[$x[$i-1]][$y[$j+1]];
        $cal2 *= 1/(2/sqrt(2)+1);

        $efeld[$x[$i]][$y[$j]]["x"] = -($cal1-$cal2)/
            ($x[$i+1]-$x[$i-1]);
        $anzahl++;

        $cal1 = $matrix[$x[$i]][$y[$j+1]];
        $cal1 += 1/sqrt(2)*$matrix[$x[$i+1]][$y[$j+1]];
        $cal1 += 1/sqrt(2)*$matrix[$x[$i-1]][$y[$j+1]];
        $cal1 *= 1/(2/sqrt(2)+1);
        $cal2 = $matrix[$x[$i]][$y[$j-1]];
        $cal2 += 1/sqrt(2)*$matrix[$x[$i+1]][$y[$j-1]];
        $cal2 += 1/sqrt(2)*$matrix[$x[$i-1]][$y[$j-1]];
    }
}

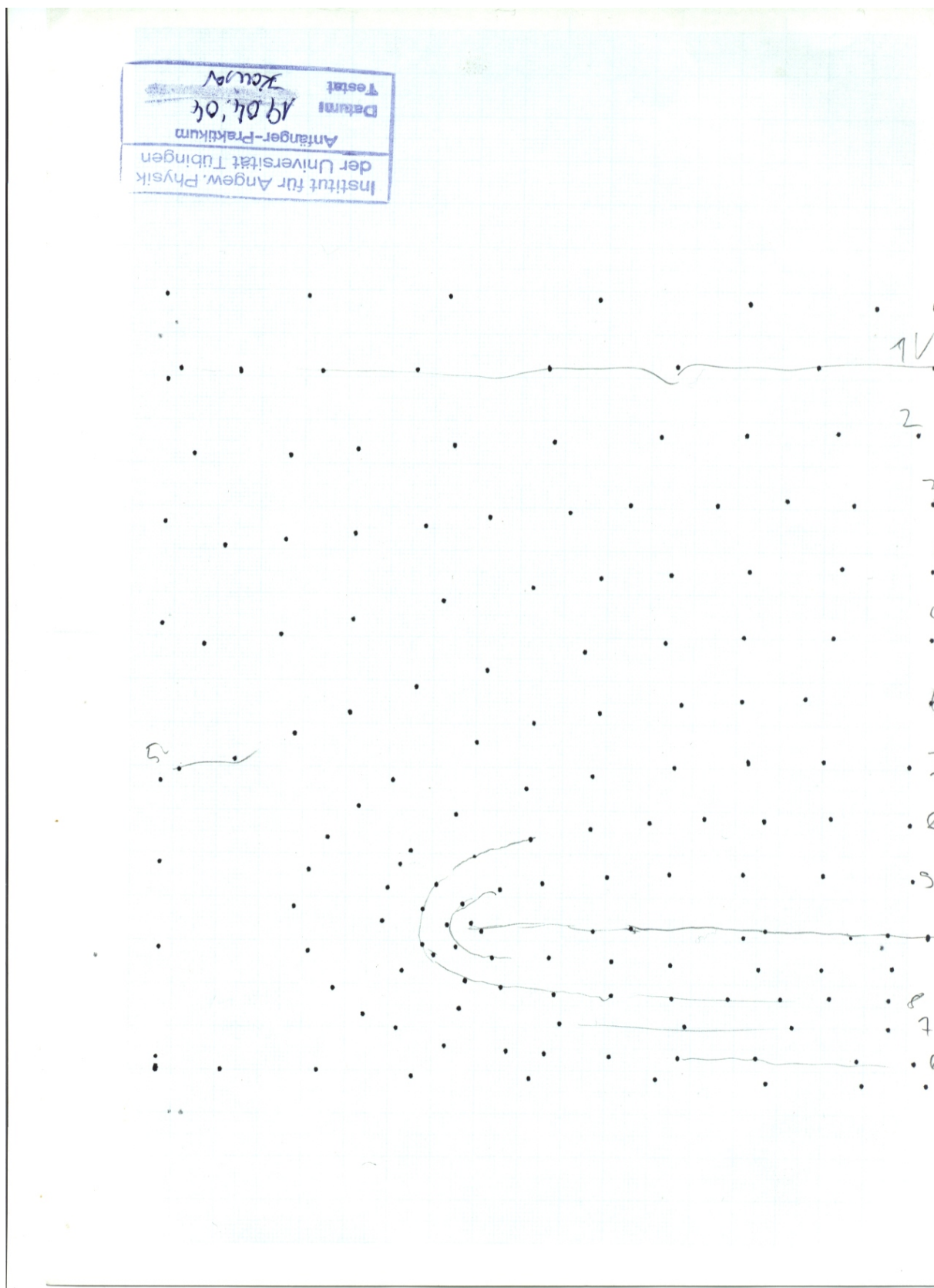
```

```
        $cal2 *= 1/(2/sqrt(2)+1);
        $efeld[$x[$i]][$y[$j]]["y"] = -($cal1-$cal2)/
            ($y[$i+1]-$y[$i-1]);
        #echo $efeld[$x[$i]][$y[$j]]["x"]."<br>";
    }
}
echo "electric_field_calculation_done: $anzahl_vectors_added!<br>";
echo "start_writing_to_file: $filename...<br>";
$out = fopen($filename,"w");
for ($i=1;$i<$max_x-1;$i++){
    for ($j=1;$j<$max_y-1;$j++){
        fwrite($out, $x[$i]."\t".$y[$j]."\t".
            $efeld[$x[$i]][$y[$j]]["x"].
            "\t".$efeld[$x[$i]][$y[$j]]["y"]."\n");
        #echo $x[$i]."\t".$y[$j]."\t".
            $efeld[$x[$i]][$y[$j]]["x"]."\t".
            $efeld[$x[$i]][$y[$j]]["y"]."\n";
    }
}
fclose($out);
echo "file_written!<br>";
?>
exiting...
```





### Originalmessdaten Anordnung 2





### Originalmessdaten Anordnung 3

